

## Procedimiento para solución de ensambles de elementos finitos en 1D

### Procedure for solving finite element assemblies in 1D

COLLAZO-BARRIENTOS, Juan Carlos<sup>†</sup>, RUBALCAVA-RUIZ, Dulce María, PLASCENCIA-MORA Héctor y CORREA-ZÚÑIGA, L.O.

*Universidad Politécnica de Aguascalientes. Paseo San Gerardo #207. Fracc. San Gerardo. C.P.20342.*

ID 1<sup>er</sup> Autor: *Juan Carlos, Collazo-Barrientos* / **ORC ID:** 0000-0002-7436-4523, **Researcher ID Thomson:** S-5559-2018, **CVU CONACYT ID:** 208634

ID 1<sup>er</sup> Coautor: *Dulce María, Rubalcava-Ruiz* / **ORC ID:** 0000-0001-8046-4267, **Researcher ID Thomson:** S-6990-2018 **CVU CONACYT ID:** 947302

ID 2<sup>do</sup> Coautor: *Héctor, Plascencia-Mora* / **ORC ID:** 0000-0003-1798-6729, **CVU CONACYT ID:** 48849

ID 3<sup>er</sup> Coautor: *L.O., Correa-Zúñiga*

Recibido 20 Junio, 2018; Aceptado 30 Septiembre, 2018

#### Resumen

Se describe un procedimiento para lograr un aprendizaje significativo en los alumnos de ingeniería que aplican por primera vez el Método de Elemento Finito matricial. El objetivo de éste es que los estudiantes puedan generar de manera rápida y sencilla una matriz de rigidez global en un ensamble de elementos de un grado de libertad en cada uno de sus nodos. Los elementos resorte y barra 1D son los primeros que se analizan en cursos donde se emplea el método numérico de elemento finito (FEM). El procedimiento de solución propuesto consta de 6 pasos en los elementos resorte y en los elementos barra 3 pasos adicionales, es decir, en total 9 pasos. Dicho procedimiento facilita la solución de problemas estáticos complejos que no pueden resolverse con métodos tradicionales utilizados en materias como estática y resistencia de materiales. Actualmente, dicho procedimiento es aplicado a estudiantes de la materia de Ingeniería Asistida por Computadora de 8vo cuatrimestre reduciendo el porcentaje de reprobación en la unidad de aprendizaje 1.

**FEM, Aprendizaje, Procedimiento, Resorte y barra**

#### Abstract

A procedure is described to achieve significant learning in the engineering students who apply the Finite Element Matrix Method for the first time. The aim of this is that students can generate quickly and easily a global matrix of stiffness in an assembly of elements of a degree of freedom in each of its nodes. The elements spring and bar 1D are the first that are analyzed in courses where the numerical method of finite element (FEM) is used. The proposed solution procedure consists of 6 steps and in the elements bar 3 additional steps, that is, in total 9 steps. This procedure facilitates the solution of complex static problems that can't be solved by traditional methods used in subjects such as static and material resistance. Currently this procedure is applied to students of the course of Computer-Assisted Engineering of the eighth semester reducing the percentage of failure in the unit 1.

**FEM, Learning, Procedure, Spring and rod**

**Citación:** COLLAZO-BARRIENTOS, Juan Carlos, RUBALCAVA-RUIZ, Dulce María, PLASCENCIA-MORA Héctor y CORREA-ZÚÑIGA, L.O. Procedimiento para solución de ensambles de elementos finitos en 1D. Revista de Análisis Cuantitativo y Estadístico. 2018. 5-15: 18-29.

\*Correspondencia al Autor (Correo electrónico: [juan.collazo@upa.edu.mx](mailto:juan.collazo@upa.edu.mx))

<sup>†</sup>Investigador contribuyendo como primer Autor.

**Introducción**

**Problema**

Los estudiantes de octavo cuatrimestre de Ingeniería Mecánica Automotriz de la Universidad Politécnica de Aguascalientes en el periodo mayo-agosto 2017 (2017-2) tuvieron deficiencia en la solución de ejercicios que implicaron los fundamentos del método de elemento finito matricial, específicamente los elementos de 1D (un grado de libertad en cada uno de sus nodos). El resultado fue que el 35% de alumnos no aprobaron ni alcanzaron la competencia en la primera unidad de aprendizaje.

**Justificación**

La aportación al método numérico de elemento finito matricial tradicional es un procedimiento para generar de forma rápida y sencilla la matriz de rigidez global, la cual es importante para una solución correcta de un problema, y es donde justamente los alumnos del ciclo 2017-2 tuvieron sus principales errores, lo cual provocó que no acreditaran la primera unidad de aprendizaje.

En la literatura es difícil encontrar un procedimiento completo para determinar todas las propiedades de un elemento resorte y no se diga de un elemento barra en 1D, por lo que este trabajo sintetiza los pasos a realizar y se incluye un ejemplo explicado paso a paso.

**Hipótesis**

La solución de problemas de fundamentos del Método de Elemento Finito (FEM) en la primera unidad de aprendizaje, mediante un procedimiento aplicado correctamente disminuye el porcentaje de reprobación.

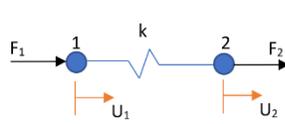
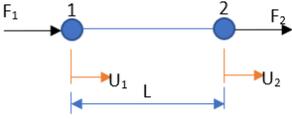
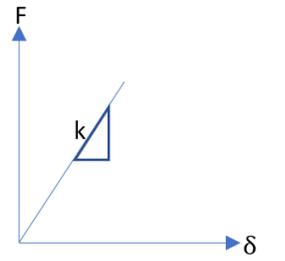
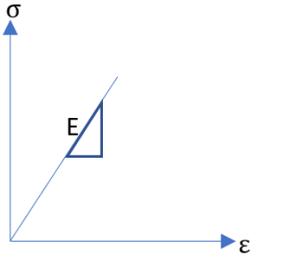
**Comparación elemento resorte vs elemento barra 1D**

El procedimiento de este documento solamente se aplica a los elementos resorte y barra 1D en el Método de Elemento Finito (en específico el matricial) que tienen las siguientes características:

1. Todos los nodos tienen un grado de libertad y en el mismo eje en el sistema coordinado global.

2. Se les aplican cargas axiales (pasan por centroide de su sección transversal o eje axial).
3. Su comportamiento es lineal y por lo tanto cumple con la Ley de Hooke, es decir, elementos elásticos lineales que al dejar de aplicar cargas regresan a su longitud inicial, ver Gráfico (a)-(b) en la Tabla 1.

En la siguiente **Tabla 1** se comparan los elementos resorte y elementos barra 1D.

Elemento resorte 1D	Elemento barra 1D
<i>Representación FEM</i>	<i>Representación FEM</i>
	
<b>Figura (a)</b>	<b>Figura (b)</b>
	
<b>Gráfico (a)</b>	<b>Gráfico (b)</b>
<i>Ley de Hooke</i> $F \propto \delta$ (1) $F = k\delta$ (1.1) donde, F= fuerza axial externa aplicada. $\delta$ = el cambio de longitud en el resorte. k= constante de proporcionalidad lineal o de rigidez axial.	<i>Ley de Hooke</i> $\sigma \propto \epsilon$ (2) $\sigma = E \epsilon$ (2.1) donde, $\sigma$ = esfuerzo normal axial. $\epsilon$ = deformación unitaria E= constante de proporcionalidad lineal o módulo elástico.
<i>Datos en problemas</i> • Constantes de rigidez.	<i>Datos en problemas</i> • Módulo de elasticidad. • Longitudes. • Propiedades de la sección transversal.
<i>Ecuaciones de las fuerzas en cada nodo</i> $F_1 = k(U_1 - U_2)$ (3) $F_2 = k(U_2 - U_1)$ (4)	<i>Ecuaciones de las fuerzas en cada nodo</i> $F_1 = \frac{AE}{L}(U_1 - U_2)$ (5) $F_2 = \frac{AE}{L}(U_2 - U_1)$ (6)
<i>Representación matricial</i> $\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$	<i>Representación matricial</i> $\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

**Tabla 1** Comparación de elemento resorte vs barra 1D.

En la Tabla 1 las ecuaciones (3) como la ecuación (5) para la fuerza en el nodo 1 “F<sub>1</sub>” y las ecuaciones (4)-(6) para la fuerza en el nodo 2 “F<sub>2</sub>” son muy similares y se puede concluir que la rigidez de un elemento barra se puede calcular:

$$k \equiv \frac{AE}{L} \tag{7}$$

También que la matriz de rigidez local de un elemento resorte es  $\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$  y la matriz de rigidez local de un elemento barra es  $\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix}$ .

**Desarrollo**

En esta sección se dan a conocer los pasos del procedimiento aplicado en elementos resorte como barra 1D.

**Método de Elemento Finito (FEM) matricial**

El método numérico de elemento finito matricial tradicional se explica en esta sección. Para análisis estáticos las matrices principales son: la matriz de rigidez, vector columna de los grados de libertad de los nodos y vector columna de cargas, ver ecuación matricial (8).

$$[k]\{d\}=[F] \tag{8}$$

Donde:

[k] = matriz de rigidez.

{d} vector columna de grados de libertad.

[F] vector columna de cargas.

En el método matricial divide en cuatro submatrices la matriz de rigidez global, el vector de grados de libertad en conocidos como desconocidos al igual que el vector de cargas.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DD \\ DC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FC \\ FD \end{bmatrix} \tag{9}$$

Donde:

DD=subvector de grados de libertad desconocidos (desplazamientos desconocidos).

DC= subvector de grados de libertad conocidos (desplazamientos conocidos).

FC= subvector de cargas conocidas

FD= subvector de cargas desconocidas

Al realizar la multiplicación de (9) se tienen las siguientes ecuaciones matriciales de las cargas:

$$FC = K_{11}DD + K_{12}DC \tag{10}$$

$$FD = K_{21}DD + K_{22}DC \tag{11}$$

Despejando el subvector que contienen las incógnitas de desplazamientos desconocidos, es decir DD, se tiene la siguiente ecuación matricial:

$$DD = [K_{11}]^{-1} (FC - K_{12}DC) \tag{10.1}$$

Con las ecuaciones matriciales (10.1) y (11) se pueden obtener las incógnitas principales de nuestro problema.

**Procedimiento para ensamble de elementos resorte 1D**

En esta sección se detalla el procedimiento para analizar un ensamble de elementos resorte 1D. En la Figura 1 se muestran los pasos a seguir para la resolución de problemas de ensamble de elementos resorte 1D.

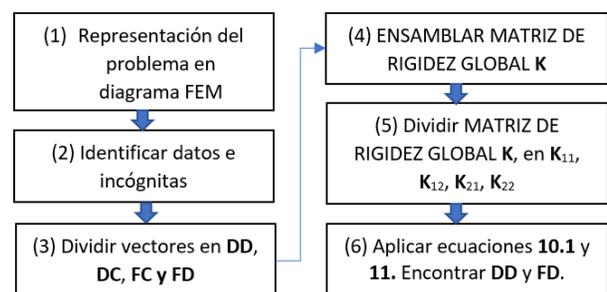


Figura 1 Procedimiento para la solución de problemas que contienen elementos resorte 1D

**Paso 1** Representación del problema en diagrama FEM. En la Figura (a) de la Tabla 1 se puede observar que un elemento resorte consta de dos nodos en los extremos y entre ellos se conecta un símbolo similar a una resistencia utilizado en circuitos eléctricos. Importante en un ensamble:

- Numerar todos los nodos de izquierda a derecha.
- Numerar todos los elementos indicando su rigidez.
- Colocar en cada uno de los nodos sus desplazamientos, primero utilizar una línea vertical mostrando la referencia y una flecha hacia la derecha, así como nombrar cada desplazamiento con una U que indica el desplazamiento en dirección en el eje X positivo “X (+)”.  
 En los nodos fijos (restringidos), colocar *fuerzas de reacción* hacia la derecha. Al final de la solución el signo corrobora el sentido correcto de estas fuerzas.

**Paso 2** Identificar datos e incógnitas. Uno de los pasos básicos para solucionar problemas es enlistar y clasificar en una tabla de dos columnas los datos conocidos e incógnitas, ver la Tabla 2.

Datos	Incógnitas
En la primera de ella los datos que se pueden obtener de un enunciado, de tablas de materiales o de una imagen, diagrama o boceto.	Valores que van a ser encontrados. En este caso: I. desplazamientos de nodos libres y II. fuerzas de reacción.

**Tabla 2** Clasificación de datos conocidos e incógnitas

**Paso 3** Dividir vectores en DD, DC, FC y FD. Después de clasificar y enlistar los datos e incógnitas, lo consecutivo es dividir los vectores columna de desplazamientos como el de cargas, ver acomodo en ecuación matricial (9). Importante, DD debe tener el mismo número de filas que FC (mxn), así como DC y FD (oxp).

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{DD} \\ \mathbf{DC} \end{Bmatrix}_{\substack{m \times n \\ o \times p}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{FC} \\ \mathbf{FD} \end{Bmatrix}_{\substack{m \times n \\ o \times p}} \quad (9.1)$$

Nota: las fuerzas con sentido contrario al sentido del desplazamiento deben tener signo negativo.

**Paso 4** Ensamblar matriz de rigidez global **k**. El tamaño de la matriz de rigidez global es igual al número total de grados de libertad o desplazamientos en los nodos. Por ejemplo, si se tienen U<sub>1</sub>, U<sub>2</sub>, U<sub>3</sub>, U<sub>4</sub> y U<sub>5</sub> en el ensamble, la matriz de rigidez global es de 5x5 (cinco filas y cinco columnas).

La matriz de rigidez global tiene dos características:

1. Es cuadrada (mismo número de filas como de columnas).
2. Es simétrica (los elementos son un reflejo tomando como referencia su diagonal principal).

El acomodo de la matriz debe coincidir con el orden del paso 3, es decir, primero los desplazamientos desconocidos (**DD**) en orden de menor a mayor y después los desplazamientos conocidos (**DC**). Por ejemplo, si se tiene como desplazamientos desconocidos U<sub>2</sub>, U<sub>3</sub> y U<sub>4</sub>, los desplazamientos conocidos son U<sub>1</sub>=0 y U<sub>5</sub>=0.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{DD} \\ \mathbf{DC} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_1 \\ U_5 \end{Bmatrix} \quad (9.2)$$

Se debe tener el mismo orden tanto en fila como en columna. Por lo tanto, como se muestra en la Figura 2, la matriz se ordena de la siguiente manera:

$$\begin{matrix} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \begin{bmatrix} x & & & & \\ & x & & & \\ & & x & & \\ & & & x & \\ & & & & x \end{bmatrix} & \mathbf{2} \\ & & & & & \mathbf{3} \\ & & & & & \mathbf{4} \\ & & & & & \mathbf{1} \\ & & & & & \mathbf{5} \end{matrix}$$

**Figura 2** Ejemplo del orden de matriz de rigidez global.

El procedimiento del llenado consta, primeramente, de analizar los nodos y después los elementos del ensamble.

**Nodos**

Los valores de rigidez que se introducen en la matriz forman la diagonal principal y todos sus valores son positivos.

- a. Las posiciones en la matriz de rigidez tienen el mismo número en la fila como en la columna. Por ejemplo, en la Figura 2, la primera posición de la diagonal tiene en su fila el número 2 y como columna el número 2.

- b. El número de posiciones en la diagonal principal corresponde al número total de posibles desplazamientos en cada nodo.
- c. En un nodo se pueden conectar más de un elemento, por lo que, la rigidez de cada uno de ellos se suma. Se debe hacer la siguiente pregunta, ¿qué elementos están conectados al nodo en cuestión?, y sumarlos.

**Elementos**

Los elementos 1D tienen dos nodos en sus extremos (ver Figura (a) y (b) en la Tabla 1), por lo tanto, por cada elemento se introducirá su rigidez correspondiente en dos posiciones de la matriz global.

1. Las dos posiciones en la matriz de rigidez global por cada elemento pertenecen a la combinación de los números de sus nodos (extremos). Por ejemplo, en la Figura 3, el elemento tiene los nodos 3 y 4 como extremos. Por lo tanto, a las posiciones (3,4) y (4,3) se le asigna la rigidez de ese elemento, en este caso  $k_2$ .
2. El signo de la rigidez deberá ser negativo, en ambas posiciones.

**Posiciones Vacías**

Las posiciones de la matriz de rigidez global que quedan sin llenar se les asignan CEROS.

Importante, verificar que la matriz resultante sea SIMÉTRICA, de lo contrario debe encontrar el posible error y corregirlo.

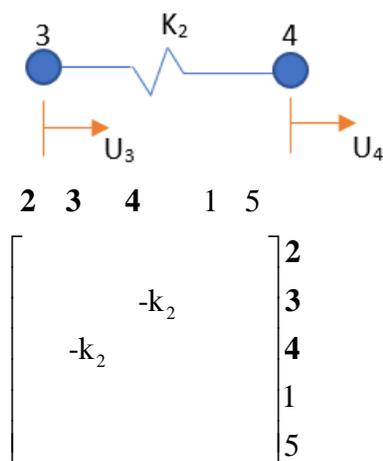


Figura 3 Elemento con nodos 3-4 con rigidez  $k_2$

**Paso 5** Dividir la matriz de rigidez global  $K$ , en  $K_{11}$ ,  $K_{12}$ ,  $K_{21}$ ,  $K_{22}$

Los tamaños de las submatrices de rigidez depende también de la división del vector de grados de libertad (desplazamientos DD y DC).

- a. La submatriz  $K_{11}$  debe ser cuadrada y su número de columnas es igual al número de filas de DD.
- b. La submatriz  $K_{12}$  debe tener el mismo número de columnas que las filas de DC.
- c. En el caso de  $K_{21}$  su número de columnas es igual al número de filas de DD.
- d. La submatriz  $K_{22}$  debe tener el mismo número de columnas que el número de filas de DC.

Una división gráfica puede explicarse y es una forma sencilla de cumplir con los incisos a, b, c y d anteriores (lo que permite la multiplicación de las matrices).

Por ejemplo, de acuerdo con la expresión (9.2) y la Figura 2, se tienen 3 desplazamientos desconocidos y 2 conocidos. Para la división se traza una línea horizontal y una vertical en la matriz  $K$  separando lo que desconocemos y lo que conocemos (ver Figura 4).

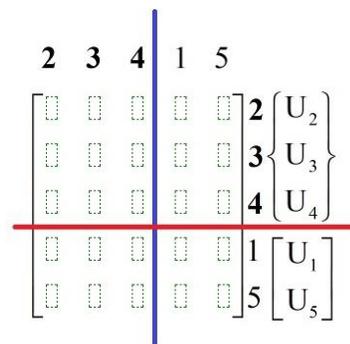


Figura 4 Ejemplo de división de una matriz  $K$

En el ejemplo de la Figura 4, el tamaño de  $K_{11}$  es 3x3,  $K_{12}$  de 3x2,  $K_{21}$  de 2x3,  $K_{22}$  de 2x2. El subvector DD en este ejemplo es de 3x1 y DC de 2x1. Generalmente,  $K_{21} = K_{12}^T$ .

**Paso 6** Aplicar ecuaciones 10.1 y 11. El último paso para la solución de problemas de elementos 1D es, aplicar las ecuaciones matriciales 10.1 y 11 respectivamente.

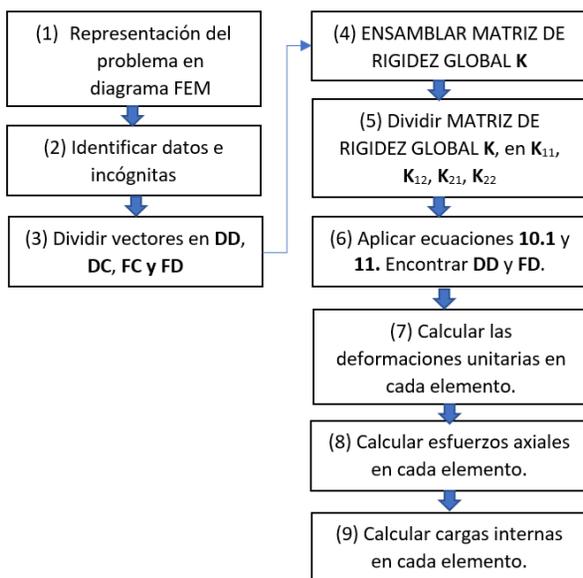
$$\mathbf{DD} = [\mathbf{K}_{11}]^{-1} (\mathbf{FC} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{DC}) \tag{10.1}$$

$$\mathbf{FD} = \mathbf{K}_{21} \mathbf{DD} + \mathbf{K}_{22} \mathbf{DC} \tag{11}$$

Por eso la importancia de la división en el paso 5 para que las operaciones matriciales puedan ser aplicadas correctamente.

### Procedimiento para ensamble de elementos barra 1D

A continuación, se describe el procedimiento para resolver problemas que involucren elementos barra 1D. En la Figura 5 se tienen los pasos. Nótese que es similar al procedimiento que en los elementos resorte 1D hasta el paso 6, pero se adicionan 3 pasos más para determinar las deformaciones unitarias, los esfuerzos normales y cargas internas.



**Figura 5** Procedimiento para la solución de problemas que contienen elementos resorte 1D

**Paso 1.** Representación del problema en diagrama FEM. En la Figura (b) de la Tabla 1 se tiene la representación de un elemento barra 1D. A diferencia de un elemento resorte, la barra debe incluirse su longitud y una línea entre sus nodos.

**Paso 2.** Identificar datos e incógnitas. En los elementos barra se deben conocer las propiedades de la sección transversal para calcular el área, todas las longitudes y todos los materiales para determinar el módulo elástico, estos datos sirven para calcular la rigidez del elemento o de los elementos si se trata de un ensamble, como se indica en la ecuación (7).

Tanto los pasos 3, 4, 5 y 6 en barras son idénticos que los pasos de los elementos resorte 1D.

**Paso 7** Calcular las deformaciones unitarias en cada elemento. La fórmula general para determinar la deformación unitaria en una barra es:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad (12)$$

Donde:

$\varepsilon$  = es la deformación unitaria (adimensional)

$\delta$  = cambio de longitud en la barra

$L$  = longitud original de la barra

En el método de elemento finito para barras, se utilizan los desplazamientos para calcular el cambio de longitud.

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{U_j - U_i}{L} \quad (12.1)$$

Donde:

$U_j$  = desplazamiento del nodo final de la barra

$U_i$  = desplazamiento del nodo inicial de la barra

**Paso 8** Calcular los esfuerzos normales en cada elemento barra. El tipo de esfuerzo generado por las cargas axiales aplicadas en los extremos de las barras es normal. En el método de elemento finito se utiliza la fórmula de la Ley de Hooke.

$$\sigma = E\varepsilon \quad (13)$$

Donde:

$\sigma$  = esfuerzo normal debido a carga axial

$E$  = módulo de elasticidad

En el paso 7 se determina la deformación unitaria y en el paso 2 los módulos de elasticidad.

**Paso 9** Calcular las cargas internas en cada uno de los elementos. El último de los pasos que se pueden calcular en los ensambles de elementos barra 1D son las cargas internas en cada uno de los elementos.

La fórmula para calcular los esfuerzos normales cuales se conoce la carga interna en un elemento barra es:

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{14}$$

Donde:

$\sigma$  = esfuerzo normal debido a carga axial  
 A = área de la sección transversal perpendicular a la carga  
 P = carga axial interna

En el paso 8 se calculan los esfuerzos y en el paso 2 las áreas de la sección transversal. Se despeja la ecuación (14).

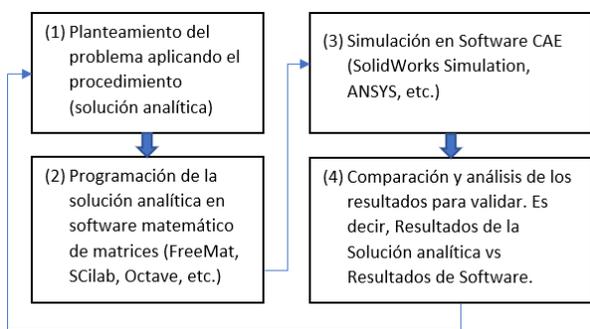
$$P = \sigma A \tag{14.1}$$

**Resultados**

En esta sección se aplica mediante un ejemplo paso a paso con lo explicado en el procedimiento explicado en el desarrollo. Además, de la metodología aplicada en la clase y finalmente el porcentaje de aprobación después de aplicar ésta.

**Metodología de aplicación de procedimiento en aula**

En la Figura 6 se muestra la metodología aplicada en clases de la primera unidad de aprendizaje tanto en aula como en un laboratorio de cómputo. La sesión consta de cuatro momentos principales.

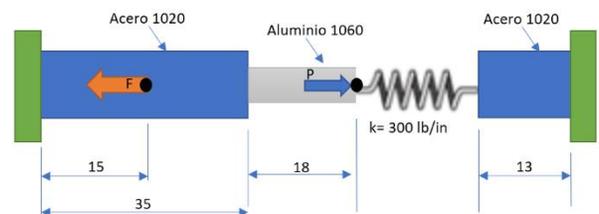


**Figura 6** Momentos principales en una sesión de clase donde se aplica el procedimiento de solución

1. Planteamiento del problema. (solución analítica). Al inicio de la clase, el alumno plantea el problema aplicando el procedimiento descrito en las secciones 2.2 y 2.3.

2. Programación de la solución analítica en software matemático de matrices. El segundo momento de la sesión, el alumno crea el código de programa en un software matemático de operaciones matriciales.
3. Simulación en Software CAE. En el tercer momento, el estudiante simula el problema con la ayuda de un software comercial de Ingeniería Asistida por Computadora (Computer Aided Engineering). Importante, que los módulos elásticos utilizados en el código del momento (2) debe ser igual a las propiedades de los materiales asignados en la simulación.
4. Comparación y análisis de los resultados. En el último momento de la clase, se comparan los resultados obtenidos en (2) y (3). Deben ser iguales, de lo contrario se debe regresar y revisar de nuevo su planteamiento del problema, su código de programa y su simulación.

**Ejemplo de aplicación**



**Figura 7** Ejercicio de ejemplo para aplicación del procedimiento de solución de ensambles 1D en FEM. Cotas en pulgadas (in)

En la Figura 7 se muestra un ensamble de tres barras y un resorte. Las barras de acero AISI 1020 tienen un diámetro de 0.75 in en su sección transversal y la barra de aleación de aluminio 1060 un diámetro de 0.4 in. El resorte posee una constante de rigidez de 300 lb/in. Se aplican dos cargas externas, la primera F=1000 lb a 15 in del soporte izquierdo y P= 500 lb en el extremo derecho de la barra de aluminio.

**Paso 1** Representación del problema en diagrama FEM

En la Figura 8 se muestra la representación FEM del problema de ejemplo. Importante, se agrega un nodo donde se aplica la carga F (en FEM matricial, las cargas son aplicadas sólo en nodos).

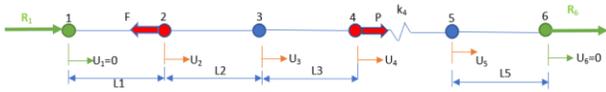


Figura 8. Representación FEM de la Figura 7

**Paso 2.** Identificar datos e incógnitas. En la Tabla 3 se clasifican como ordenan los datos como las incógnitas.

Datos	Incógnitas
$E_A=10007603.9$ psi	Principales
$E_S=29007547.53$ psi	$U_2$
$L_1=15$ in	$U_3$
$L_2=20$ in	$U_4$
$L_3=18$ in	$U_5$
$L_5=13$ in	$R_1$
$d_A=0.4$ in	$R_6$
$d_S=0.75$ in	
$k_4=300$ lb/in	
$U_1=0$ in	
$U_6=0$ in	
$F=1000$ lb	
$P=500$ lb	

Tabla 3 Datos e incógnitas del problema ejemplo

Adicionalmente, se pueden determinar la rigidez equivalente en cada uno de los elementos barra.

$$k_1 = \frac{E_s A_s}{L_1} \tag{7.1}$$

$$k_2 = \frac{E_s A_s}{L_2} \tag{7.2}$$

$$k_3 = \frac{E_A A_A}{L_3} \tag{7.3}$$

$$k_5 = \frac{E_s A_s}{L_5} \tag{7.4}$$

Donde:

$$A_A = \frac{\pi d_A^2}{4} \tag{15}$$

$$A_S = \frac{\pi d_s^2}{4} \tag{16}$$

**Paso 3.** Dividir vectores en DD, DC, FC y FD.

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} -F \\ 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}_{4 \times 1} \tag{9.2}$$

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_6 \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_6 \end{Bmatrix}_{2 \times 1}$$

Nótese en los subvectores de (9.2) que la fuerza en el nodo 2 es negativa y que los tamaños de las matrices concuerdan.

**Paso 4** Ensamblar matriz de rigidez global k.

El orden de los números en las filas y columnas es 2, 3, 4, 5, 1 y 6 como en la expresión (9.2). El tamaño de la matriz es 6x6.

**Nodos**

En el nodo 1 y 6 sólo se conecta un elemento, pero en 2, 3, 4 y 5 se conectan dos de ellos. Por lo que la diagonal de la matriz de rigidez global se llena de la siguiente manera. Ver la Figura 9.

$$\begin{matrix} & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \\ \begin{bmatrix} k_1+k_2 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & k_2+k_3 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & k_3+k_4 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & k_4+k_5 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & k_1 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & k_5 \end{bmatrix} & 2 \\ & & & & & & 3 \\ & & & & & & 4 \\ & & & & & & 5 \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & 6 \end{matrix}$$

Figura 9 Llenado de la diagonal principal de K

**Elementos**

El primer elemento tiene como extremos los nodos 1 y 2, por lo que se introduce  $-k_1$  en las posiciones (1,2) y (2,1). El mismo caso para los otros 4 elementos. Ver la Figura 10.

$$\begin{matrix} & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \\ \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & \emptyset & \emptyset & -k_1 & \emptyset \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & -k_4 & k_4+k_5 & \emptyset & -k_5 \\ -k_1 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & k_1 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & -k_5 & \emptyset & k_5 \end{bmatrix} & 2 \\ & & & & & & 3 \\ & & & & & & 4 \\ & & & & & & 5 \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & 6 \end{matrix}$$

Figura 10. Llenado de la rigidez por elementos

Las posiciones vacías se llenan con cero. Se debe verificar que la matriz sea simétrica. Ver la Figura 11.

$$\begin{array}{cccccc}
 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \\
 \left[ \begin{array}{cccccc}
 k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & -k_1 & 0 \\
 -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -k_4 & k_4+k_5 & 0 & -k_5 \\
 -k_1 & 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -k_5 & 0 & k_5
 \end{array} \right] \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 6 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 11. Matriz de rigidez global **K** resultante.

**Paso 5** Dividir la matriz de rigidez global **K**, en **K<sub>11</sub>**, **K<sub>12</sub>**, **K<sub>21</sub>**, **K<sub>22</sub>**. Se traza una línea horizontal como vertical para separar los números de los nodos cuyos desplazamientos son desconocidos de los nodos cuyos desplazamientos son conocidos. Ver la Figura 12.

$$\begin{array}{cccccc}
 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \\
 \left[ \begin{array}{cccccc}
 k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & -k_1 & 0 \\
 -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -k_4 & k_4+k_5 & 0 & -k_5 \\
 -k_1 & 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -k_5 & 0 & k_5
 \end{array} \right] \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 6 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 12. Matriz de rigidez global **K** resultante dividida

Por lo tanto, en las expresiones (17) a (20) se tienen las matrices **K<sub>11</sub>**, **K<sub>12</sub>**, **K<sub>21</sub>**, **K<sub>22</sub>**.

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4+k_5 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (17)$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -k_5 \end{bmatrix}_{4 \times 2} \quad (18)$$

$$\mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \quad (19)$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_5 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (20)$$

**Paso 6** Aplicar ecuaciones 10.1 y 11. El último paso para la solución de problemas de elementos 1D es aplicar las ecuaciones matriciales 10.1 y 11 respectivamente.

$$\mathbf{DD} = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix}_{4 \times 1} = [\mathbf{K}_{11}]_{4 \times 4}^{-1} (\mathbf{FC}_{4 \times 1} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{DC}) \quad (10.1.1)$$

$$\mathbf{FD} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_6 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{21} \mathbf{DD} + \mathbf{K}_{22} \mathbf{DC} \quad (11.1)$$

Los siguientes 3 pasos se aplican solamente para los elementos barra 1D.

**Paso 7** Calcular las deformaciones unitarias en cada elemento. En total tenemos 4 elementos barra. Por lo tanto, 4 deformaciones unitarias.

$$\epsilon_1 = \frac{U_2 - U_1}{L_1} \quad (12.1.1)$$

$$\epsilon_2 = \frac{U_3 - U_2}{L_2} \quad (12.1.2)$$

$$\epsilon_3 = \frac{U_4 - U_3}{L_3} \quad (12.1.3)$$

$$\epsilon_5 = \frac{U_6 - U_5}{L_5} \quad (12.1.4)$$

**Paso 8** Calcular los esfuerzos normales en cada elemento barra. Se utiliza la ecuación de al Ley de Hooke en barras para determinar los esfuerzos normales debido a cargas axiales.

$$\sigma_1 = E_s \epsilon_1 \quad (13.1)$$

$$\sigma_2 = E_s \epsilon_2 \quad (13.2)$$

$$\sigma_3 = E_A \epsilon_3 \quad (13.3)$$

$$\sigma_5 = E_s \epsilon_5 \quad (13.4)$$

**Paso 9** Calcular las cargas internas en cada uno de los elementos Finalmente, con las siguientes ecuaciones se calculan las cargas internas que se generan en las cuatro barras.

$$P_1 = A_s \sigma_1 \quad (14.1.1)$$

$$P_2 = A_s \sigma_2 \quad (14.1.2)$$

$$P_3 = A_A \sigma_3 \quad (14.1.3)$$

$$P_5 = A_s \sigma_5 \quad (14.1.4)$$

Después de planear el problema, la segunda etapa o momento de la sesión de clase es generar el programa. A continuación, el código del ejemplo en el software FreeMat se muestra en la Figura 13.

```

1 clear;
2 clc;
3 format long;
4
5 EA=10007603.9;
6 ES=29007547.53;
7 L1=15;
8 L2=20;
9 L3=18;
10 L5=13;
11 dA=0.4;
12 dS=0.75;
13 U1=0;
14 U6=0;
15 F=1000;
16 P=500;
17
18 AA=(pi*dA^2)/4;
19 AS=(pi*dS^2)/4;
20
21 k1=(ES*AS)/L1;
22 k2=(ES*AS)/L2;
23 k3=(EA*AA)/L3;
24 k4=300;
25 k5=(ES*AS)/L5;
26
27 DC=[U1;U6];
28 FC=[-F;0;P;0];
29
30 K11=[k1+k2 -k2 0 0;-k2 k2+k3 -k3 0;...
31 0 -k3 k3+k4 -k4;0 0 -k4 k4+k5];
32 K12=[-k1 0;0 0;0 0 -k5];
33 K21=[-k1 0 0 0;0 0 0 -k5];
34 K22=[k1 0;0 k5];
35
36 disp('DESPLAZAMIENTOS')
37 DD=inv(K11)*(FC-K12*DC)
38 disp('REACCIONES')
39 FD=K21*DD+K22*DC
40
41 U2=DD(1,1);
42 U3=DD(2,1);
43 U4=DD(3,1);
44 U5=DD(4,1);
45
46 disp('DEFORMACIONES UNITARIAS')
47 e1=(U2-U1)/L1
48 e2=(U3-U2)/L2
49 e3=(U4-U3)/L3
50 e5=(U6-U5)/L5
51
52 disp('ESFUERZOS')
53 S1=ES*e1
54 S2=ES*e2
55 S3=EA*e3
56 S5=ES*e5
57
58 disp('CARGAS INTERNAS')
59 P1=AS*S1
60 P2=AS*S2
61 P3=AA*S3
62 P5=AS*S5
    
```

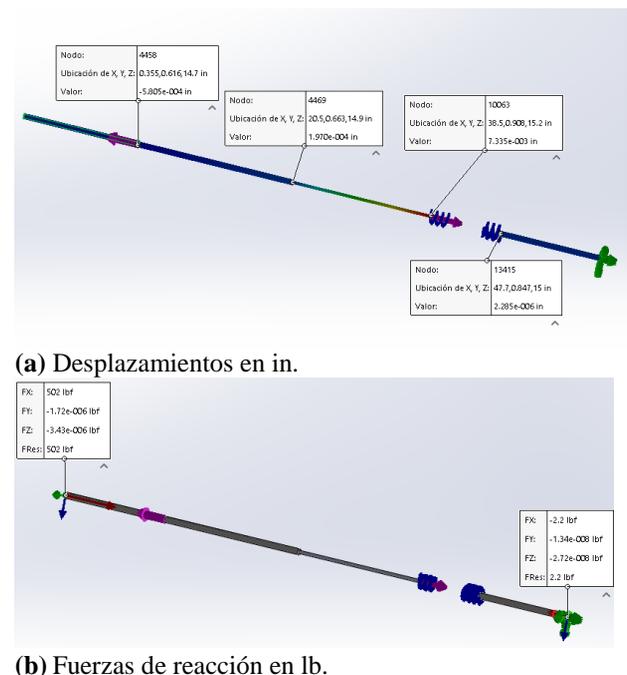
Figura 13 Código en FreeMat del ejercicio de ejemplo

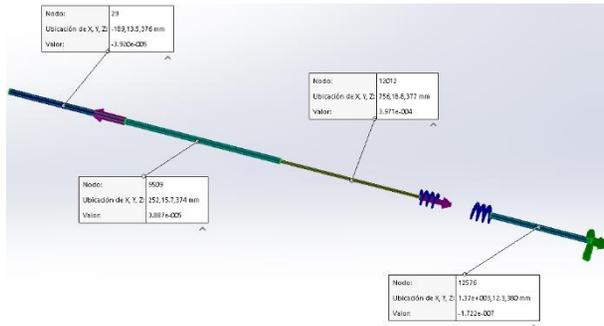
En la Figura 14 se dan a conocer los resultados.

DESPLAZAMIENTOS	ESFUERZOS
DD =	S1 =
1.0e-003 *	-1136.73377822639509
-0.58781276341137	S2 =
0.18909068837222	1126.80319019167200
7.31422424599801	S3 =
0.00222524231526	3961.41746551759707
REACCIONES	S5 =
FD =	-4.96529401736159
502.19359970110474	CARGAS INTERNAS
-2.19359970110482	P1 =
DEFORMACIONES UNITARIAS	-502.19359970110480
e1 =	P2 =
-3.91875175607579e-005	497.80640029889520
e2 =	P3 =
3.88451725891793e-005	497.80640029889526
e3 =	P5 =
3.95840753201433e-004	-2.19359970110482
e5 =	
-1.71172485789308e-007	

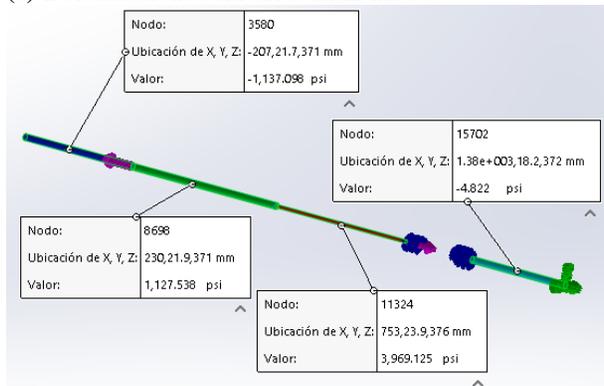
Figura 14 Resultados del programa del ejercicio de ejemplo

En el tercer momento de la sesión el alumno simula en un software CAE. Las Figuras 15 (a)-(c) se muestran los resultados arrojados en SolidWorks Simulation.





(c) Deformaciones unitarias en in/in.



(d) Esfuerzos axiales en psi.

Figura 15 Resultados de la simulación en SW Simulation

Este paso el último momento en la sesión de clase se resume en la **Tabla 4** donde se comparan los resultados del programa en FreeMat y SolidWorks Simulation.

Parámetro	FreeMat	SW Simulation
Desplazamientos (in)	$U_2 = -0.58781e-03$	$-5.805e-04$
	$U_3 = 0.18909e-03$	$1.970e-04$
	$U_4 = 7.31422e-03$	$7.335e-04$
	$U_5 = 0.00222e-03$	$2.285e-06$
Fuerzas de reacción (lb)	$R_1 = 502.19$	502
	$R_6 = -2.1936$	-2.2
Deformaciones unitarias (in/in)	$\epsilon_1 = 3.9187e-05$	$-3.920e-05$
	$\epsilon_2 = 3.8845e-05$	$3.887e-05$
	$\epsilon_3 = 3.9584e-04$	$3.971e-04$
	$\epsilon_5 = -1.711e-07$	$3.887e-05$
Esfuerzos (psi)	$\sigma_1 = -1136.733$	-1,137.098
	$\sigma_2 = 1126.803$	1,127.538
	$\sigma_3 = 3961.417$	3,969.125
	$\sigma_4 = -4.965$	-4.822

Tabla 4 Comparación y análisis de resultados

En la Figura 16 se tienen los detalles de la malla utilizada en los elementos sólidos en SolidWorks Simulation.

Nombre de estudio	Análisis estático 1 (-Predeterminado-)
Tipo de malla	Malla sólida
Mallador utilizado	Malla estándar
Transición automática	Desactivar
Incluir bucles automáticos de malla	Desactivar
Puntos jacobianos	4 puntos
Tamaño de elementos	7.27396 mm
Tolerancia	0.363698 mm
Calidad de malla	Elementos cuadráticos de alto orden
Número total de nodos	15902
Número total de elementos	8679
Cociente de aspecto máximo	6.2262
Porcentaje de elementos con cociente de aspecto < 3	99.3
Porcentaje de elementos con cociente de aspecto > 10	0
% de elementos distorsionados (Jacobiano)	0
Regenerar la malla de piezas fallidas con malla incompatible	Desactivar

Figura 16 Detalles del mallado utilizado en la simulación

**Agradecimiento**

Nuestro reconocimiento al cuerpo académico consolidado ante PRODEP de Diseño y Manufactura del DICIS de la UG (UGTO-CA-21 - DISEÑO Y MANUFACTURA) por apoyarnos en la revisión de este trabajo.

**Conclusiones**

El procedimiento explicado en este trabajo de investigación puede aplicarlo tanto un estudiante que requiere los fundamentos como un profesor en cursos introductorios del Método de Elemento Finito.

En nuestro caso la aplicación del procedimiento y la metodología de impartición de clase (los cuatro momentos en una sesión) permitió disminuir el porcentaje de reprobación de un 35% a un 5% en el periodo 2018-2.

Cabe mencionar que el Método de Elemento Finito es un método numérico y que los programas comerciales como SolidWorks Simulation se aproximan al valor real. Al comparar los resultados se tiene un error menor al 5%. El principal factor para este error es el tipo de mallado y tamaño del elemento.

La principal aportación del procedimiento al método tradicional de elemento finito son los pasos 4 y 5 para generar fácilmente una matriz de rigidez global.

## Referencias

Baaser, H. (2010). *Development and Application of the Finite Element Method based on Matlab*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Bi, Z. (n.d.). *Finite element analysis applications*. Peter Jardim.

Chandrupatla, T. and Belegundu, A. (2012). *Introduction to Finite Elements in Engineering*. Harlow, United Kingdom: Pearson Education Limited.

Kassimali, A. (2012). *Matrix analysis of structures*. Australia: Cengage Learning.

Kattan, P. (2003). *MATLAB Guide to Finite Elements*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Khennane, A. (2013). *Introduction to finite element analysis using MATLAB and Abaqus*. Boca Raton, Fla. [u.a.]: CRC Press, Taylor & Francis Group.

Rao, S. (2005). *The finite element method in engineering*. Amsterdam: Elsevier/Butterworth Heinemann.

Zienkiewicz, O. (1997). *The finite element method*. London: McGraw-Hill.

Zienkiewicz, O. and Taylor, R. (2000). *The finite element method*. Oxford: Butterworth-Heinemann.